

MATHEMATISCH CENTRUM

2e BOERHAAVESTRAAT 49

AMSTERDAM

STATISTISCHE AFDELING

DUPLICAAT

SA

Leiding: Prof. Dr D. van Dantzig

Chef van de Statistische Consultatie: Prof. Dr J. Hemelrijk

Rapport S 167 (ov 5)

Overzicht van een aantal artikelen over "Operations Research".

door

G. de Leve

en

J. Kriens

1955

BIBLIOTHEEK
MATHEMATISCH
AMSTERDAM
CENTRUM

Linear Programming.

Vele economische, technische en militaire problemen kunnen worden opgelost met de methode van "Linear Programming". ~~Onderstaande voorbeelden~~ zijn in wezen allen gelijk en slechts een vertaling van het algemene probleem: Gevraagd, die waarden van de variabelen te berekenen, welke een gegeven lineaire functie van deze variabelen maximaliseert, terwijl zij tevens voldoen aan een aantal lineaire ongelijkheden. Meestal kunnen dit soort problemen met de simplexmethode worden opgelost.

Er bestaat een nauw verband tussen de volgorde van de voorbeelden en de eenvoud van de probleemstelling.

1) An introduction to Linear Programming.

A. Charnes, W.W. Cooper and A. Henderson, Wiley and Sons
(1953) 74 blz.

Dit boekje bestaat uit twee delen. In het eerste deel wordt het volgende voorbeeld besproken.

Een koopman brengt drie producten op de markt, bestaande uit gemengde noten. De samenstellingen van de drie artikelen zijn verschillend en worden mede bepaald door de verlangens van de consument. Zo zal zijn duurste product b.v. voor minstens 50% uit amandelen moeten bestaan. Bovendien kan hij van ieder soort noten niet meer dan een bepaalde hoeveelheid per dag inslaan. Hij zou geen goed koopman zijn, als hij niet zocht naar die samenstellingen van zijn producten, welke onder de genoemde beperkingen het winstgevendst zijn. Het voorbeeld wordt opgelost met de simplexmethode.

In het tweede deel (34 blz.) wordt deze methode op duidelijke wijze behandeld.

2) Solution of the personnel classification problem with the method of optimal regions.

Paul S. Dwyer; Psychometrika 19 (1954) 11-26 .

Een bedrijf heeft voor N functies sollicitanten opgeroepen. Wanneer er evenveel sollicitanten zijn als functies dan zijn er $N!$ plaatsingsmogelijkheden. Iedere sollicitant⁽ⁱ⁾ wordt getest voor elke functie (j) en zijn geschiktheid uitgedrukt in het getal C_{ij} . Gevraagd wordt de gunstigste bezetting. Het probleem is oplosbaar met de Simplex methode, maar de schrijver geeft de voorkeur aan een andere.

- 3) Methods of solving some personnel-classification problems.
D.F. Votaw, Jr ; Psychometrika 17 (1952) 255-266 .

Hetzelfde probleem als bij no. 2, maar nu wel opgelost met de Simplex methode.

- 4) Application of the Simplex method to a transportation problem.
G.B. Dantzig in Activity Analysis of Production and Allocation, edited by Tj.C.Koopmans (1951) 359-373 .

Een homogeen product, aanwezig in m havens moet verscheept worden naar n verschillende bestemmingen. In de havens zijn aanwezig de hoeveelheden $a_1, \dots, a_m$, terwijl op de bestemmingsplaatsen $b_1, \dots, b_n$ gebracht moet worden. x_{ij} is de hoeveelheid verscheept van haven i naar bestemming j , terwijl de kosten per eenheid van vervoer c_{ij} bedragen. Gevraagd de totale kosten te minimaliseren, dus die waarden van x_{ij} op te sporen, waarvoor $\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$ minimaal wordt onder de voorwaarden $\sum_{j=1}^n x_{ij} = a_i$ en $\sum_{i=1}^m x_{ij} = b_j$. De oplossing wordt wederom verkregen met de Simplex methode.

- 5) Blending Aviation Gasolines. - A study in Programming interdependent activities in an integrated Oilcompany -
A. Charnes, W.W. Cooper en B. Mellon Econometrica 20 (1952) blz. 135-159 .

Door menging van Alkylate I, Catalytic gasoline A, straight run gasoline mix A en Isopentane in verschillende hoeveelheden ontstaan drie soorten vliegtuigbenzine en één voor auto's. In verband met het klopeffect is er een benedengrens voor het octaangehalte in vliegtuigbenzine. Omdat een te grote vluchtigheid tot ongewenste toestanden leidt, bestaat er een bovengrens voor de R.V.P. (maat voor vluchtigheid). De onderlinge gewichtsverhoudingen tussen de beschikbare grondstoffen kunnen vrijwel niet gewijzigd worden. Een verbeterde Simplex methode geeft een oplossing voor dit probleem.

- 6) A Model for programming and sensitivity Analysis in an Integrated Oil Company - A. Charnes, W.W. Cooper en B. Mellon Econometrica 22 (1954) 193-217 .

Een vrij ingewikkeld model wordt opgebouwd van een oliemaatschappij. Hoewel ook dit model een grove benadering is van de werkelijkheid, wordt er toch rekening gehouden met alle belangrijke factoren, zoals productie, raffinage, transport en verkoop. Met de simplex methode berekent men hoe de winst wordt gemaximaliseerd, terwijl ook wordt ingegaan op een geval, waarin de winstfunctie, niet lineair is in de nog te kiezen variabelen.

Wachttijdproblemen

Dit soort problemen doet zich voor in alle bedrijven en in velerlei uiteenlopende vormen. Wij geven hieronder een aantal voorbeelden, waarvan de oplossing zonder al te veel wiskunde gevonden kan worden. Voor de bestudering van de meeste wachttijdproblemen is echter een uitgebreide kennis van de wiskunde noodzakelijk.

- 7) Waiting line and servicing problems, W. Feller, An Introduction to Probability Theory and its Applications, hfst. 17 par. 7. John Wiley and Sons (1950).

In deze paragraaf worden wachttijdproblemen besproken, die verband houden met telefooncentrales, loketten bij postkantoren en het repareren van machines door één of meer personen.

Om wachttijdproblemen te kunnen oplossen moet men meestal aannemen dat aan de volgende onderstellingen is voldaan:

a) het aantal nieuwe klanten, dat zich per tijdseenheid aanmeldt om behandeld te worden, is onafhankelijk van het aantal klanten, dat reeds bediend is, nog bediend wordt of op bediening wacht en b) de bedieningstijd hangt niet af van de reeds verwerkte klanten en de aankomstintervallen. Bovendien onderstelt Feller nog, dat zowel de aankomstintervallen als de behandelingstijden exponentieel verdeeld zijn. Vooral deze laatste eisen zijn in de praktijk dikwijls niet vervuld.

Het systeem kan in verschillende toestanden verkeren; zo kunnen er in een fabriek een aantal machines stilstaan, omdat ze op reparatie wachten, maar het is ook mogelijk, dat er geen werk voor de reparateurs is.

Wanneer een systeem aan de bovengenoemde eisen voldoet, kan zonder veel moeite worden berekend, wat de waarschijnlijkheid is, dat het systeem in een bepaalde toestand verkeert. Hierbij wordt de theorie van het "birth and death" proces gebruikt, welke in de voorafgaande paragrafen van hoofdstuk 17 op duidelijke wijze is geschetst.

- 8) State probabilities in congestion problems, characterized by constant holding times. J. L. Everett, Jrn. O.R. Soc. America 1 (1953) 279-285.

In het voorafgaande uittreksel werd ondersteld, dat de behandelingstijden exponentieel verdeeld waren. Vaak is het echter

realistischer om aan te nemen, dat deze tijden constant zijn. Wij zeggen, dat het systeem in toestand j verkeert als er j personen zijn die behandeld worden of nog op behandeling wachten. Het artikel geeft nu een methode om de waarschijnlijkheid te berekenen, dat het systeem in de j -de toestand verkeert bij constante behandelingstijden en een exponentiële verdeling van de aankomstintervallen. Verder worden deze waarschijnlijkheden vergeleken met de overeenkomstige waarschijnlijkheden bij exponentieel verdeelde behandelingstijden.

9) The influence of servicing times in queuing processes.

Donald P. Gaver, Jrn. O.R.Soc.America 2 (1954) 139-149

Het verband tussen behandelingstijd en wachttijd wordt onderzocht voor het geval er één loket is. De schrijver neemt aan, dat niet iedere klant evenveel diensten verlangt en laat dan zien hoe wijzigingen in het aantal diensten de verhouding tussen de gemiddelde wachttijd en de gemiddelde behandelingstijd beïnvloeden. Zo blijkt deze verhouding gunstig voor de klant te liggen, naarmate het aantal gevraagde diensten toeneemt (grote warenhuizen!). Wil men echter gedurende een bepaalde behandelingstijd zoveel mogelijk klanten helpen, dan moet men trachten het aantal fasen van de behandeling te verminderen.

De wiskundige achtergrond van deze problemen is gecompliceerd.

10) Priority assignment in waiting line problems. Alan Cobham, Jrn.O.R.Soc America 2 (1954), 70-76.

Bij wachttijdproblemen is de plaats die een element, b.v. een telegram krijgt in een rij niet altijd alleen afhankelijk van het tijdstip van aankomst. Vaak zijn telegrammen verdeeld in categorieën, waarvan de ene belangrijker geacht wordt dan de andere en waarbij het meer urgente telegram voorrang krijgt boven het minder urgente.

In het artikel wordt de gemiddelde wachttijd berekend voor ieder van een eindig aantal categorieën en wel in twee gevallen:

- 1) niet meer dan één loket voor behandeling; geen onderstellingen over de verdelingen van de tijd nodig om een telegram te verwerken
- 2) verschillende loketten en dezelfde exponentiële verdeling van de behandelingstijden voor alle categorieën.

Tenslotte noemen wij hieronder nog een artikel, waarin een met wachttijden verwant probleem besproken wordt.

- 11) The reliability of airborne radar equipment. D.M. Boodman, Jrn.O R.Soc. America 1 (1953) 39-45.

De waarde van machines wordt mede bepaald door het aantal technische storingen, dat zich kan voordoen. In het algemeen zal dit aantal groter worden naarmate de machines gecompliceerder zijn. Als bekend is van welke onderdelen het uitvallen tot stilstaan van de machines leidt en men weet hoe lang deze onderdelen reeds in gebruik zijn, kan men de waarschijnlijkheid berekenen, dat de machine nog t tijdseenheden zonder storing zal werken. Onder bepaalde onderstellingen wordt deze kans op eenvoudige wijze afgeleid. Aan een praktijkvoorbeeld (vacuum-buizen) laat men zien, dat de gemaakte onderstellingen reëel zijn.

Beslissingsfuncties

De theorie van de beslissingsfuncties beoogt een zo algemeen mogelijke beschrijving te geven van statistische problemen en vervolgens optimale oplossingen te construeren, rekening houdend met de consequenties onder verschillende omstandigheden. De formulering is meestal zeer algemeen en abstract. De volgende uittreksels geven een inzicht in de soort problemen, die met deze theorie aangepakt kunnen worden.

11a. The Theory of Statistical Decision, L.J. Savage, J.A.S.A 46 (1951) 55-67.

Dit artikel, oorspronkelijk alleen bedoeld als een recensie van het boek Statistical Decision Functions van A. Wald, bevat een elementaire uiteenzetting van enkele belangrijke begrippen uit de theorie van de beslissingsfuncties en twee eenvoudige voorbeelden. Het minimaxprincipe wordt niet toegepast op de winstfunctie, maar op de spijtfunctie, die het verschil aangeeft tussen hetgeen men in een bepaalde situatie bereikt en hetgeen men in die situatie had kunnen bereiken. Deze zogenaamde minimax-regret methode is door verschillende auteurs scherp becritizeerd. Op blz. 60 komen enige niet storende drukfouten in de vermelde getallen voor.

12. The problem of testing for the fraction of defectives.
J.V. Breakwell, Jrn O.R. Soc. America 2 (1954) 59-69.

Wanneer een partij goederen moet worden gekeurd, moet men beslissen op welke wijze het onderzoek zal plaatsvinden. De beslissing hierover hangt af van het risico, dat men loopt, d.i. de som van "keurings"kosten en de financiële gevolgen bij ten onrechte goed- of afkeuren. Een redelijke wijze van onderzoek is die methode, waarbij het maximale verwachte risico minimaal is. Voor bepaalde vormen van de risicofunctie wordt de beste niet sequente en de beste sequente methode gegeven. Ook wordt het probleem besproken, wanneer de risicofunctie nog onzekerheden bevat.

Van de meeste formules geeft de schrijver geen afleidingen, aangezien deze in veel gevallen tamelijk lastig zijn.

13. In het boek van A. WALD, Statistical Decision Functions komt op blz. 12-14 een voorbeeld voor, dat in iets gewijzigde formulering op het volgende neerkomt. Men neemt van een kenmerk (b.v. de kwaliteit van een partij goederen) aan, dat het normaal verdeeld is met gegeven spreiding en wil nu nagaan of het gemiddelde groter of kleiner is dan een getal k . Men kan kiezen tussen twee toetsingsmethoden, waarvan de één na de waarnemingen beslist op grond van het gemiddelde, de ander op grond van de mediaan der uitkomsten. Het is nu mogelijk na te gaan onder welke omstandigheden de eerste methode minder risico oplevert dan de tweede.

14. Estimation of the fraction defective in finite lots when the loss function is quadratic in Theory of Games and Statistical Decisions van David Blackwell and M.A. Girshick, blz. 165-167.

Een partij goederen is afkomstig uit een beheerst fabricageproces en nu wil men met behulp van een steekproef schatten hoe groot de fractie ondeugdelijke exemplaren is. Wanneer de schade een kwadratische functie is van het verschil tussen de geschatte en de werkelijke fractie defecten in de partij, wordt gevraagd, bij welke schatting het verwachte verlies zo klein mogelijk is. Het blijkt, dat de in dit opzicht beste schatting niet gelijk hoeft te zijn aan de fractie defecten gevonden in de steekproef.

15. In het boek Theory of Games and Statistical Decisions van David Blackwell and M.A. Girshick vindt men op blz. 176-178 de volgende toepassing.

Een textielfabrikant verkoopt iedere rol stof, die wordt geproduceerd in een beheerst fabricageproces. De kwaliteit van een rol wordt aangegeven door het aantal dunne plekken en losse draden per yard, terwijl het product in drie kwaliteitsklassen wordt verkocht. De afnemer is bereid de prijs te betalen, welke voor de opgegeven klasse is overeengekomen, maar als de kwaliteit achteraf lager blijkt te zijn, is de fabrikant een bedrag verschuldigd aan de afnemer.

Voordat hij een rol in één der kwaliteitsklassen indeelt, neemt de fabrikant een steekproef van gegeven omvang. Hij vraagt zich nu af in welke klasse een partij op grond van het steekproefresultaat moet worden ingedeeld, wanneer hij de verwachting van de opbrengst wil maximaliseren.

16. Optimum preventive sampling, P. Whittle, Jrn O.R. Soc. America 2 (1954), blz. 197-203.

Dikwijls worden steekproeven genomen, niet om het aantal defecten of overtredingen te schatten, maar juist om niet gewenste toestanden te voorkomen (b.v. door controleren van tramconducteurs). Het verschil met de gebruikelijke steekproef is, dat nu gelet moet worden op de reacties (b.v. de mate van verbetering na de controle) van diegenen, die gecontroleerd worden. Zijn er een aantal groepen, waarbinnen het aantal elementen en de reacties op steekproeven verschillend zijn, dan wordt nagegaan, hoe een van tevoren vastgesteld aantal controles verdeeld moet worden over deze groepen. Hiertoe minimaliseert men de verwachting van de waarde der niet opgemerkte defecten (fouten). Het model is eenvoudig, doch de wiskundige uitwerking kan ingewikkeld zijn.

Voorraadproblemen.

Voorraadvorming betekent voor vele ondernemingen een investering van kapitaal in producten en opslagruimten. Zowel een te grote voorraad als een te kleine voorraad kan zeer nadelig zijn. In de volgende artikelen worden methoden aangegeven om de optimale voorraad te bepalen.

Voor het geval dat de voorraadbeheerder ook producent is, zal men niet de optimale voorraad, maar de optimale productie berekenen.

Een voorraad heet optimaal, als de kosten daaraan verbonden minimaal zijn.

17. La mise en équation du problème des stocks.

G. Kreweras, *Revue de Statistique appliquée*, 3(1955) 83-90

Een fabriek verbruikt van een bepaalde grondstof een vast aantal eenheden. Bij de fabriek is een opslagruimte met een beperkte capaciteit aanwezig

Indien van de prijsfluctuaties van de grondstoffen wordt aangenomen, dat zij door een stochastische variabele met een bekende verdelingsfunctie kunnen worden beschreven, dan kan men een inkoopvoorschrift opstellen, waarin aangegeven wordt hoeveel men van de grondstoffen moet inslaan als de prijs en voorraad op dat tijdstip bekend zijn en waarbij de verwachting van de totale kosten minimaal is.

Een en ander wordt toegelicht met een eenvoudig voorbeeld.

18. Optimal Inventory policy.

K.J. Arrow, T. Harris en J. Marschak
Econometrica 19 (1951) 250-271.

Vele ondernemingen, die de verbindingsschakel vormen tussen consument en producent, worstelen met de vraag, hoeveel van een bepaald artikel in voorraad genomen dient te worden.

Een te grote voorraad is nadelig, omdat er dan veel geld geïnvesteerd is, dat geen rente opbrengt. Een te kleine voorraad geeft extra kosten, omdat men bij kleine bestellingen minder korting krijgt van de producent en men afgezien de grootte van de bestelling altijd vaste kosten maakt bij de uitvoering ervan. Bovendien loopt men het risico een klant te verliezen door de lange afleveringsduur.

In dit artikel worden met behulp van enkele veronderstellingen oplossingen gegeven voor dit probleem.

Men neemt aan, dat de inkoopkosten gegeven worden door $q \cdot b(q)$ waarbij q de grootte van de bestelling aangeeft en $b(q)$ een lineaire functie is van q met bekende constanten.

De opslagkosten bedragen in dit model $C_0 + c \cdot z$, waarbij z de grootte van de voorraad aangeeft en zowel C_0 als c bekende constanten zijn.

Indien verder de verdeling van de bestellingen van de klanten in een tijdsinterval gegeven is, dan kan men met behulp van, doch ook zonder de theorie van de Markoffprocessen de optimale voorraad capaciteit bepalen en tevens de tijdstippen aangeven, waarop orders aan de producent dienen te worden gegeven.

De oplossingen zijn optimaal in die zin, dat de totale kosten minimaal zijn.

Het bovengenoemde artikel is niet eenvoudig, maar wel begrijpelijk.

19. The Inventory problem.

J. Laderman, S.B. Littauer en L. Weiss.

Journal of the American Statistical Association 48
(1953) 717-733.

In dit artikel worden de verkoopproblemen van een colporteur van een maandblad besproken.

Allereerst bekijkt men het geval, dat de verkoper bij het begin van iedere maand een vast aantal bladen moet inkopen en dat hij op de 10de van elke maand in de gelegenheid gesteld wordt een aantal bij te bestellen of terug te zenden. De colporteur, die per exemplaar van het publiek f 0,15 ontvangt, moet zelf per nummer f 0,06 betalen, terwijl hij voor onverkochte exemplaren op de 10de dag van de maand f 0,04 en aan het eind van de maand f 0,02 terug krijgt.

De afname van maandbladen door het publiek kan worden beschreven door een stochastische variabele met bekende verdelingsfunctie.

De vraag, die nu gesteld wordt, luidt: Hoeveel kranten moet hij op de 10de van elke maand bestellen of terugzenden, als hij de verwachting van zijn winst wil maximaliseren.

In het volgende voorbeeld behoeft de colporteur bij het begin van iedere maand geen vaste hoeveelheid bladen in te kopen, maar kan hijzelf het aantal bepalen. Aangenomen wordt, dat de afname gedurende de eerste periode van de maand ook beschreven kan worden door een stochastische variabele met een bekende verdelingsfunctie.

Thans wil men weten hoeveel kranten onze colporteur bij het begin van de maand dient in te kopen om de verwachting van de totale winst te maximaliseren.

20. Optimal decision rules for production and inventory control.

Charles C. Holt en Herbert A. Simon.

Proceedings of the conference on operation research in production and inventory control. January 20-22, 1954, Institute of Technology, Cleveland Ohio, U.S.A.

In dit artikel, dat beschouwd moet worden als een vervolg op H.A. Simon's: "On the Application of servomechanism theory in the study of Production Control" in *Econometrica* 20 (1952) 247-268, geven de schrijvers drie methoden aan om tot een optimale voorraad en productiepolitiek te komen.

Indien de verkoop van een bepaald artikel constant is, kan men de productie hierop instellen en behoeft men dus geen buffer-voorraad aan te leggen. In de praktijk echter is de verkoop aan schommelingen onderhevig en zal men een voorraad moeten hebben om deze variatie op te vangen.

Het opslaan van artikelen brengt kosten met zich mee en men kan zich dan ook afvragen of het niet de voorkeur verdient het productietempo voortdurend aan te passen. Zowel vertraging als versnelling van het productietempo hebben financiële gevolgen.

Holt en Simon zijn van mening, dat deze extra kosten in eerste benadering kunnen worden aangegeven met een functie, die lineair afhankelijk is van het kwadraat van de totale voorraad en van het kwadraat van de productieverandering.

Zij geven dan richtlijnen voor de volgende drie gevallen:

- 1e toekomstige verkoop is bekend,
- 2e toekomstige verkoop is geheel onbekend,
- 3e toekomstige verkoop is niet geheel onbekend.

Deze drie regels zijn aan de praktijk getoetst en vergeleken. Het verrassende was dat de optimale politiek voor toestand 2 een betere oplossing gaf dan die van toestand 3.

Enige kennis van de theorie van het servomechanisme is vereist.

21. Production planning overtime and the nature of expectation and planning horizon.

Franco Modigliani en Franz E. Hohn.

Econometrica 23 (1955) 46-66.

Voor de uitvoering van een opdracht wordt gedurende de verschillende stadia, waarin de uitvoering verdeeld kan worden, een hoeveelheid van een bepaald product verbruikt.

De marginale productiekosten van dit artikel nemen toe met de grootte van de productie. Het is dus steeds voordelig van dit product kleine hoeveelheden te vervaardigen.

Anderzijds zal men echter steeds aan de vraag moeten voldoen en indien men geen voorraad heeft, zal het kunnen voorkomen, dat men in een periode veel moet produceren, hetgeen zeer nadelig is.

Uitgaande van redelijke veronderstellingen omtrent de totale kosten van productie en voorraadvorming geven Modigliani en Hohn methoden aan om tot een optimale productie te komen.

Behalve enkele algebraïsche oplossingen voor die toestanden, waarin de marginale productiekostenfunctie constant of toenemend is, vindt men in dit artikel ook een grafische methode, toegepast op een kwadratische kostenfunctie.

S 167 (Ov 5)

Lineaire programmering (vervolg I)¹⁾

- 22) Mathematical Programming; better information for better decision making. A. Henderson and R. Schlaifer, Harvard Business Review 32 (1954) 73-100.

Het doel van de schrijvers blijkt uit de volgende zin van de inleiding: "This article is an attempt to define mathematical programming for businessmen, describe what it means in practice, and show exactly how to use it to solve company problems." De nadruk wordt gelegd op de kosten- en tijdsbesparing, die men kan verkrijgen. Immers lineaire programmering doet systematisch wat ook bedrijfsleiders steeds nastreven: het bepalen van de onder de bestaande beperkingen, meest winstgevende productie- en distributiemethoden. Het artikel laat duidelijk zien, wat voor soort problemen aangepakt kunnen worden, terwijl de vele illustraties zeer verhelderend zijn. Behalve oplossingen verschaft het wiskundig programmeren ook inzicht in de kosten en winsten, welke gemaakt worden bij de verschillende werkzaamheden van een maatschappij, wat b.v. van belang kan zijn bij reclamecampagnes en spoorwerk ter verbetering van productiemethoden.

In een appendix wordt een oplossingsmethode besproken en toegepast, die men kan gebruiken wanneer de voorwaarden, waaraan de variabelen moeten voldoen alle lineaire gelijkheden zijn; het is een vereenvoudiging van de simplexmethode.

- 23) The selection of livestock enterprises by activity analysis. Earl R. Swanson and Kirk Fox, Jrn of Farm Economics, 36 (1954) 78-86.

Op een gemengd bedrijf worden ieder jaar bepaalde oppervlakten bebouwd met maïs en haver; de rest van het land wordt gebruikt voor hooi- en weideland. De aanwezige arbeiders moeten een bekend deel van hun tijd besteden aan de oogstwerkzaamheden van maïs en haver. In de overblijvende uren kunnen ze het vee verzorgen en eventueel hooi binnenhalen. Nu bestaan er verschil-

- 1) De uittreksels 27) en 28) slaan op theoretische problemen, verband houdende met lineaire programmering en zijn voor de Operations Research niet van direct belang.

lende methoden om koeien en varkens te mesten, welke in de verschillende maanden niet evenveel arbeid vergen; ook de bij het mesten vereiste hoeveelheden maïs, haver en hooi lopen uiteen. Gevraagd wordt op welke wijze en hoeveel koeien en varkens men onder de bestaande beperkingen moet mesten om een zo groot mogelijke winst te maken.

De schrijvers stellen het model op en bespreken daarna de uitkomsten; de oplossingsmethode (de simplexmethode) wordt alleen genoemd.

- 24) A short cut to linear programming, F.V. Waugh and Glenn L. Burrows, Econometrica 23 (1955) 18-29.

De auteurs tonen in deze publicatie met een voorbeeld aan, dat het niet altijd nodig is de simplexmethode te gebruiken. Om de geschiktste combinatie van 6 processen onder 9 voorwaarden te vinden, bepalen zij eerst het onder deze voorwaarden voordeligste proces, waarvoor zij twee minuten nodig hebben. Met behulp van grafische methoden zijn zij in staat binnen vijf minuten de geschikste combinatie van twee processen aan te wijzen. Zonder veel moeite kan men ook de gunstigste combinatie van drie processen berekenen. Steeds kan worden nagegaan of toevoeging van een extra-proces voordeliger is.

In dit voorbeeld zijn de mogelijkheden het bebouwen van land met aardappelen, maïs, soyabonen, herfstkool of sla, en het houden van slachtvee. De bijvoorwaarden ontstaan door beperkingen in de beschikbare hoeveelheden land en arbeidskrachten in de verschillende seizoenen en het aanwezige kapitaal. De gunstigste combinatie van drie processen is ook de beste combinatie van alle processen. Wanneer de optimale combinatie meer dan vier of vijf processen bevat, geven de schrijvers de voorkeur aan de simplexmethode; de grafische analyse kan de simplex-algorithme dan met enige stappen bekorten.

- 25) Enige elementaire artikelen.

- a) An application of linear programming to the selection of raw materials, Noel Williams, Applied Statistics 4 (1955) 22-31.

Aan de hand van twee voorbeelden geeft de schrijver op duidelijke wijze een idee van de simplexmethode.

- b) Mathematical or "linear" programming: a non-mathematical exposition, R Dorfman, The American Economic Review 43 (1953) 797-825.

Op duidelijke wijze geeft de schrijver het verschil aan tussen marginale analyse en lineaire programmering. Oplossingen worden alleen gegeven voor zover dit met grafieken mogelijk is.

- c) The minimum-cost dairy feed. F.V. Waugh, Jrn of Farm-Economics 33 (1951) 299-310.

Een eenvoudig voorbeeld wordt eerst grafisch opgelost en daarna met vergelijkingen, doch niet op een wijze, die direct aansluit bij de in de syllabus "Operations Research" gegeven methode.

- d) Linear programming applied to feed-mixing under different price conditions, W.D. Fisher and L.W. Schruben, Jrn of Farm-Economics 35 (1953) 471-483.

Na enige eenvoudige voorbeelden, onderzoekt men het geval waarin men twee producten kan fabriceren, die moeten voldoen aan bepaalde eisen, wat het gehalte aan eiwit, vet en vezels betreft, terwijl men de beschikking heeft over tien grondstoffen. Ook wordt de vraag beantwoord, wat men moet doen als de prijzen van twee producten veranderen.

- e) Use of economic models. Some applications of activity analysis in agricultural economics, R.A. King, Jrn of Farm-Economics 35 (1953) 823-833.

Enkele voorbeelden.

- 26) Application of Linear Programming to the theory of the firm, including an analysis of monopolistic firms by non-linear programming, R. Dorfman, Publication of the Bureau of Business and Economic Research, University of California (1951), 98 blz, \$ 3,50.

Dit werkje bevat een uitvoerige en in het algemeen duidelijke bespreking van lineaire programmering in verband met economische vraagstukken. In hoofdstuk I wordt een vergelijking getrokken tussen de marginale analyse en lineaire programmering aan de hand van de onderstellingen, die aan beide ten grondslag liggen. In het tweede hoofdstuk bouwt de schrijver een model op voor een firma, die verkoopt op een markt met volledige mededinging en in het derde één voor een firma, die verkoopt

op een monopolistische markt. Het eerste blijkt een lineair, het tweede echter een kwadratisch programmeringsprobleem te zijn (kwadratische functie maximaliseren onder lineaire bijvoorwaarden). Een paragraaf over de toepasbaarheid van lineaire modellen besluit het boek.

Wanneer men wil leren lineaire programmeringsproblemen op te lossen, kan men beter zijn heil elders zoeken.

- 27) An application of the duality theorem of linear programming to testing hypotheses, H. Raiffa, Report of the Office of Naval Research (1954), 21 blz.

Volgens de toetsingstheorie van Neyman en Pearson zoekt men onder de toegelaten toetsen ($P[H_0 \text{ verwerpen} | H_0] \leq \alpha_0$) de toets met het grootste onderscheidingsvermogen ($= P[H_0 \text{ verwerpen} | H_1]$). Bestaat de steekproefruimte uit de punten $x_1, \dots, x_n$ en geldt $P[x_i | H_0] = f_i$, $P[x_i | H_1] = g_i$, terwijl als x_i het steekproefresultaat is H_1 geaccepteerd wordt met kans g_i en dus H_0 met kans $1 - g_i$, dan maximaliseert men $P[H_0 \text{ verwerpen} | H_1] = \sum_{i=1}^n g_i q_i$ onder de voorwaarde $P[H_0 \text{ verwerpen} | H_0] = \sum_{i=1}^n f_i q_i \leq \alpha_0$. Dit probleem kan worden opgelost met de simplex-methode. De schrijver laat zien hoe men bij een eindige parameter-ruimte ook het toetsen van samengestelde hypothesen tegen samengestelde alternatieven in deze vorm kan gieten. Automatisch komt hierbij naar voren het begrip van de ongunstigste a priori verdeling op de parameterruimte en het verband tussen de optimale toets en deze verdeling.

- 28) Optimality and degeneracy in linear programming, A. Charnes, Econometrica 20 (1952) 160-170.

Oorspronkelijk had de door G.B. Dantzig ontwikkelde oplossingsmethode voor lineaire programmeringsproblemen (de simplex-methode) het bezwaar, dat men bij het oplossen vast kon lopen doordat ontaardingen optraden. Charnes ontwikkelt in dit artikel een methode, die in alle gevallen tot een oplossing leidt en waarvoor geen extra berekeningen vereist zijn. Verder wordt aangegeven op welke wijze men alle optimale oplossingen kan verkrijgen.

Het artikel is helder geformuleerd; het bevat echter geen toepassingen. In vrijwel dezelfde vorm is de inhoud opgenomen in "An introduction to linear programming" van A. Charnes, W.W. Cooper en A. Henderson (zie par. 6 van deel II).

- 29) Solution of a large-scale traveling-salesman problem,
G. Dantzig, R. Fulkerson and S. Johnson, J.O.R.S.A. 2
(1954) 393-410.

Een veel voorkomend probleem is dat van de reiziger, die n plaatsen moet afreizen en zich afvraagt bij welke route de totale af te leggen weglengte minimaal is. Men kan deze vraag formuleren in de vorm van een lineair programmeringsprobleem, maar het aantal voorwaarden wordt zelfs voor kleine n reeds zo groot, dat een oplossing niet mogelijk is. Empirisch blijkt echter dat dit aantal voorwaarden in veel gevallen kan worden gereduceerd. De schrijvers geven hiertoe aanwijzingen en illustreren met enige voorbeelden op welke wijze men optimale oplossingen kan vinden en ook hoe men kan aantonen dat deze inderdaad de beste zijn.

- 30) Application of transportation theory to scheduling a military tanker fleet.
Merrill M. Flood, J.O.R.S.A. 2 (1954), 150-162.

In dit artikel wordt een concreet transport-probleem behandeld met behulp van de methode van Koopmans en Dantzig (zie 4). De schrijver onderstelt deze theorie bekend, en geeft slechts een overzicht van de uitgevoerde berekeningen. Het doel der berekeningen was een optimaal route-schema te bepalen voor de militaire tank-vloot der V.S.

- 31) Linear Programming and Profit Preference scheduling for a manufacturing firm,
A. Charnes, W.W. Cooper and D. Farr, J.O.R.S.A. 1 (1953),
114-129.

De schrijvers laten zien op welke wijze men lineaire programmeringsmodellen kan toepassen op productieproblemen. In het gegeven voorbeeld beschikt men over acht typen van één en drie typen van een andere machine; het aantal producten dat men kan fabriceren bedraagt zes. Het probleem, het productieprogramma zodanig te kiezen dat de winst maximaal is, wordt niet opgelost met de simplexmethode, doch met een methode, waarbij men eerst berekent welke winst men bereikt, indien men de beschikbare tijd op ieder type machine zo goed mogelijk gebruikt voor één van de mogelijke producten (profit-preference technique). Men bepaalt vervolgens het optimale programma, rekening houdende met een deel van de bestaande restricties en wijzigt dit dan, wanneer

ook aan andere beperkende voorwaarden nog moet worden voldaan. Deze korte methode, die alleen geschikt is voor niet te ingewikkelde problemen en ook minder inzicht in het productieproces verschaft dan de simplexmethode, is nauw verwant met de wijze van oplossen, gegeven in het in 24) besproken artikel. Met een ruwe schets van een dynamisch model wordt het artikel besloten. De tabellen III en IV op blz. 124 bevatten enige fouten.

Wachttijdproblemen (vervolg I)

32) An application of the birth and death process to the provision of spare machines,

J. Taylor and R.R.P. Jackson, Operat.Res.Quart. 5 (1954) 95-108.

Een luchtvaartmaatschappij kan alleen dan de diensten onderhouden, wanneer er N vliegtuigen ter beschikking staan. Aangezien er gemiddeld f vliegtuigen per week onklaar raken, wil men een aantal (n) reserve-toestellen aanschaffen. Vanwege de hieraan verbonden kosten wenst men zich enig inzicht te verwerven in het verband dat bestaat tussen n , f , de gemiddelde reparatietijd k , het aantal machines (r) dat tegelijkertijd gerepareerd kan worden, de kans q_{n+1} dat de dienst stilgelegd moet worden, de mate, waarin de reparatiewerkplaats wordt gebruikt en het gemiddelde aantal vliegtuigen (W_n) dat op reparatie wacht. Men berekent hiertoe de waarschijnlijkheden, P_i ($i = 0, \dots, n+1$), dat er i machines gerepareerd worden of op reparatie wachten. Wanneer $f = \frac{r}{k}$ is, blijkt het aanschaffen van meer reservevliegtuigen vrijwel geen invloed te hebben op de kans P_{n+1} ; wel neemt W_n onbeperkt toe. Een betere situatie ontstaat als $f < \frac{r}{k}$ is; voor dit geval wordt o.a. nagegaan hoe n samen hangt met r en k bij een voorgeschreven kans ($1 - P_{n+1}$), dat men de dienst niet behoeft te staken.

Het artikel is duidelijk geschreven; in de formules, gegeven op blz. 99 en 101 komen enige type- en rekenfouten voor,

33) Queuing systems with phase type service,

R.R.P. Jackson, Operat.Res.Quart. 5 (1954), 109-120.

Het komt vaak voor dat de reparatie van een machine of de bediening van een klant bestaat uit een aantal fasen, die slechts na elkaar kunnen plaatsvinden. De klant gaat dan eerst naar loket 1, wacht tot hij bediend is, loopt vervolgens naar loket 2, enz. De schrijver onderzoekt het geval van twee fasen, wanneer het aantal potentiële klanten oneindig, resp. eindig is en het geval van drie fasen voor eindig veel potentiële klanten. Wanneer men

aanneemt dat de bedieningstijden in iedere phase exponentieel verdeeld zijn en de klanten op willekeurige tijdstippen aankomen, kan men berekenen hoe groot de kans is, dat een bepaald aantal klanten wacht in één van de phasen en hoeveel er gemiddeld wachten in iedere phase.

Ontstaan er bedrijfsstoringen als er N machines gerepareerd moeten worden, dan kan men de kans hierop exact berekenen, doch ook benaderen door aan te nemen dat het aantal potentieel te repareren machines oneindig is; uit een vergelijking van de op beide wijzen berekende kansen blijkt dat men met deze benadering voorzichtig moet zijn.

- 34) On a congestion problem in an aircraft factory,
Georges Brigham, J.O.R.S.A. 3 (1955), 412-428.

De schrijver behandelt het volgende wachttijdprobleem: Stel, dat aan een toonbank met een aantal bedienden de cliënten aselekt aankomen, dat de bediening ook aselekt geschiedt en dat de behandelingstijd een exponentiële verdeling bezit. Gevraagd wordt naar het optimale aantal bedienden, d.w.z. naar het aantal personen, dat de totale kosten minimaal maakt. Er worden hier tweeërlei kosten in aanmerking genomen, nl. die tengevolge van het wachten der cliënten, en die tengevolge van het "wachten" (het niets te doen hebben) van het bedienend personeel. In het eerste gedeelte van het artikel wordt aangenomen, dat alle tijd, gedurende welke een bediende geen klant heeft, verloren tijd is, in het tweede gedeelte wordt in aanmerking genomen, dat hij deze tijd althans gedeeltelijk op andere wijze productief kan maken.

Hoewel de schrijver de studie maakte, om het optimale aantal bedienden te bepalen aan toonbanken, waar gereedschappen worden gehaald in de Boeing-vliegtuigenfabriek, is de theorie algemeen opgezet.

Levensduur van machines en materialen

- 35) Methods of maximizing useful life of equipment under operational conditions,

Leo A. Goodman. J.A.S.A. 48 (1953), 503-530.

In dit artikel wordt de levensduur beschouwd van twee of meer typen van objecten (bijv. apparaten, instrumenten, onderdelen, enz.), tijdens gebruik, wanneer de objecten van een type niet stuk voor stuk onderscheiden worden.

De beschouwingen worden toegelicht aan de hand van een voorbeeld betreffende het gebruik van drinkglazen in een restaurant.

Men beschouwt eerst twee typen objecten, aannemende, dat zij bloot staan aan een constant risico, d.w.z. dat de kans, dat een object een bepaald tijdsinterval overleeft, constant is. Men gaat hierbij uit van de zg. symmetrische vervangingsmethode. Hierbij zijn de aantallen objecten, die men per tijdseenheid vervangt, ongeveer gelijk voor de beide typen. Voorbeelden zijn: 1e de "50-50" methode; hierbij is de kans, dat een ondeugdelijk geworden of stuk gegaan object door één van het andere type wordt vervangen gelijk aan $\frac{1}{2}$; 2e de "switch" methode: hierbij wordt een object telkens door één van het andere type vervangen. Deze "switch" methode heeft diverse voordelen; bijv.: de schatting van de relatieve levensduur is bij deze methode onder bepaalde voorwaarden zuiverder en bezit bovendien een kleinere variantie dan de schattingen bij een andere symmetrische methode. Tevens is het onderscheidingsvermogen van toetsen van verschillende hypothesen betreffende de relatieve levensduur groter als de switch methode wordt gebruikt.

Er worden ook vervangingsmethoden onderzocht, die voldoen aan bepaalde voorwaarden betreffende de beschikbaarheid der beide typen. Het zou bijv. nodig kunnen zijn, dat men tweemaal zoveel door het ene type als door het andere vervangt. Ook voor deze methoden worden schattings- en toetsingsmethoden t.a.v. de relatieve levensduur gegeven.

Als de vervangingsmethode voldoende lang is toegepast, heeft men slechts schattingen van de samenstelling der populatie nodig voor de schattingen en toetsen van de relatieve levensduur; indien men tevens het totale aantal objecten kent, dat vervangen is sedert het begin, dan kan men de absolute levensduur der beide typen schatten, en hypothesen betreffende de absolute levensduur toetsen.

Verder worden schattingsmethoden gegeven betreffende relatieve en absolute levensduur voor het geval van k verschillende typen van objecten, waarbij verschillende eisen aan de vervangingsregels worden gesteld.

Het artikel kan worden beschouwd als een speciale toepassing van de vervangingstheorie en de theorie van de Markovketens.

36) Life testing,

Benjamin Epstein en Milton Sobel, J.A.S.A. 48 (1953),
486-502.

In dit artikel worden statistische problemen besproken, die betrekking hebben op het geval, dat - bij een aselechte steekproef - de gegevens der waarnemingen naar grootte gerangschikt binnenkomen. Dit is in het bijzonder het geval bij het onderzoeken van de levensduur van producten door middel van destructieve keuring.

Men houdt nu met de waarnemingen op vóórdat alle objecten vernietigd zijn, en heeft op deze manier minder tijd nodig om een bepaalde beslissing te nemen en men vernietigt minder objecten.

De schrijver geeft aan, hoe men in het geval van een exponentiële verdeelde levensduur kan komen tot een schatting van de parameters, en bespreekt de te verwachten tijdsbesparing. De wiskundige afleidingen zijn in een appendix samengebracht.

37) Minimum life in fatigue,

A.M. Freudenthal en E.J. Gumbel, J.A.S.A. 49
(1954), 575-597.

Men beschouwt het vermoeidheidsverschijnsel, optredende wanneer een bepaald voorwerp herhaalde malen wordt gebogen, getordeerd, of samengedrukt en uitgerekt. De waar te nemen variabele is het aantal malen, waarna het voorwerp breekt (dit is een functie van de grootte der kracht). Het doel is, voor voorwerpen van een bepaald materiaal en een bepaalde gedaante en grootte, de overlevingskansen te bepalen bij N herhalingen van het experiment.

In het artikel "Statistical interpretation of fatigue tests" van dezelfde schrijvers, Proceedings of the Royal Society A., 216 (1953), 309-332, werd een theorie opgesteld, waarbij werd aangenomen, dat reeds bij $N=1$ de overlevingskans kleiner dan 1 is, d.w.z. dat de minimale levensduur = 0 is. In dit artikel wordt nu aangenomen, dat er bij niet te grote krachten een bepaalde positieve drempelwaarde voor N is, waarbeneden het voorwerp zeker niet breekt.

Er worden schattingsmethoden gegeven voor de parameters, welke voorkomen in de formule van de overlevingskans, en er worden tabellen en grafieken gegeven betreffende torsie van nikkel- en aluminiumdraden.

38) Failure of complex equipment,

Gordon D. Shellard, J.O.R.S.A. 1 (1953)

Dit artikel sluit min of meer aan bij D.M. Boodman: The reliability of airborne radar equipment, J.O.R.S.A. 1 (1953), 39-45; zie (11).

De schrijver gaat er van uit, dat een machine dan en slechts dan defect is, wanneer dit met een der samenstellende delen het geval is.

Men bespreekt 2 gevallen: a) alle onderdelen zijn in de uitgangstoestand nieuw; b) de machine heeft reeds lange tijd gewerkt, en onderdelen, die defect waren geraakt, zijn dadelijk door nieuwe vervangen.

Er worden nu formules afgeleid voor de zg. overlevingskans van de gehele machine, uitgedrukt in de overlevingskansen der onderdelen.

De schrijver laat zien, dat dezelfde overlevingskromme voor de machine kan ontstaan bij onderdelen met zeer verschillende overlevingskrommen

Tenslotte wordt de mogelijkheid besproken, de betrouwbaarheid der machine te vergroten door vervanging van onderdelen bij een bepaalde ouderdom.

Productie-, voorraad- en bestelproblemen

39) Optimum operation of a complex activity under conditions of uncertainty,

Morris J. Solomon, J.O.R.S.A. 2 (1954), 419-432.

De schrijver behandelt het volgende probleem: Stel, dat de vliegtuigen van een bepaalde vliegbasis slechts kunnen vliegen als geen enkel van een aantal zg. vitale onderdelen ontbreekt. Als een zodanig onderdeel onklaar of defect raakt, en niet op de vliegbasis aanwezig is, moet het vliegtuig dus op de grond blijven, tot het onderdeel is afgeleverd. Om de verloren tijd te beperken, legt men voorraden aan. Men kan zich nu afvragen: 1) hoeveel van elk onderdeel moet men bestellen, 2) wanneer moet men bestellen? Het bepalen van de economische bestelgrootte (vraag 1) wordt hier niet behandeld (zie hiervoor bijv. Charles A. Koepke, Plant Production Control, 2d edition, Wiley, 1949). De schrijver neemt aan, dat de meest economische bestelgrootte en de afleveringstijd van elk onderdeel afzonderlijk bekend zijn en dat men de gemiddelde vraag, gedurende deze tijd, naar elk onderdeel kan schatten.

De schrijver bepaalt nu bij een bepaalde kans, dat een vliegtuig door gebrek aan één of meer onderdelen op de grond zal moeten blijven, de optimale besteltijden en de minimale totale voorraadkosten.

40) Production scheduling for an arbitrary number of periods given the sales forecast in the form of a probability distribution,

Gunnar Dannerstedt, J.O.R.S.A. 3 (1955), 300-318.

In dit artikel wordt een productie-proces beschreven, waarbij voor de vraag een waarschijnlijkheidsverdeling gegeven wordt ondersteld. De tijd, gedurende welke de onderneming bestaat, wordt verdeeld in gelijke perioden. In elke periode wordt voldoende geproduceerd om aan de vraag te voldoen; zijn de gewone productie gedurende een bepaalde periode en de voorraad aan het begin dier periode niet toereikend, dan wordt overwerk verricht. Er zijn dan de volgende onkosten:

- 1) die van het in voorraad houden der goederen,
- 2) de kosten der normale productie,
- 3) de kosten van overwerk.

Men tracht nu een optimaal productieschema te vinden, d.w.z. een zodanig schema, dat de totale kosten minimaal zijn.

De schrijver behandelt 3 gevallen, nl.:

- 1) voor elke periode wordt telkens een programma opgesteld,
- 2) er wordt om de andere periode een programma opgesteld voor 2 perioden,
- 3) er wordt eenmaal een programma opgesteld voor de gehele duur der onderneming.

Er wordt een numeriek voorbeeld gegeven, hetwelk een illustratie geeft van de verschillen, welke men aldus in de resultaten kan krijgen.

Diverse onderwerpen

41) The optimum distribution of effort,

B.O. Koopman, J.O.R.S.A. 1 (1953), 52-63.

In veel gevallen beschikt men over een beperkte hoeveelheid van een bepaald goed (ook geld of tijd), welke men wil verdelen over twee of meer projecten. Men zal dit zo doen, dat het nuttige effect maximaal is. Voorbeelden hiervan zijn de organisatie van een reclamecampagne, waarvoor een vast bedrag aan geld wordt uitgetrokken en het gedurende een vastgestelde tijd zoeken naar

een drenkeling. Zijn er twee projecten en wordt het nuttig effect van x eenheden besteed aan deze projecten, aangegeven met $f_i(x)$ ($i = 1, 2$), dan zal men bij bepaalde onderstellingen het extremum willen bepalen van $f_1(x) + f_2(x)$ onder de voorwaarde $x_1 + x_2 = c$. De schrijver behandelt numerieke en analytische methoden om dit probleem op te lossen voor verschillende gedaanten van de functies $f_i(x)$.

42) Some applications of the theory of dynamic programming - A review,

Richard Bellman, J.O.R.S.A. 2 (1954), 275-288.

Stel, men heeft van een bepaald goed een hoeveelheid x . Men kan dit goed op twee manieren gebruiken. Hiertoe verdeelt men x in y en $x-y$. Door het gebruik van y krijgt men een opbrengst $g(y)$ en houdt men ay ($0 \leq a \leq 1$) over; door het gebruik van $(x-y)$ krijgt men een opbrengst $h(x-y)$ en houdt men $b(x-y)$ over ($0 \leq b \leq 1$). De overgehouden hoeveelheid $ay + b(x-y)$ kan men weer verdelen; enz. Men kan zich nu afvragen, hoe men bij elke stap de verdeling moet uitvoeren, opdat de totale opbrengst maximaal wordt. Dit probleem lost men in de theorie van de dynamische programmering op, met behulp van functionaalvergelijkingen.

De schrijver geeft in dit artikel twee voorbeelden, t.w. het hierbovengenoemde, en een stochastisch voorbeeld. Verder geeft hij een overzicht van problemen, welke met deze theorie kunnen worden bestudeerd en een uitgebreide literatuurlijst.

43) Economic implications of some cotton fertilizer experiments, Clifford Hildreth, Econometrica 23 (1955), 88-98.

Stel, dat men continue productie-functies van een bepaalde algebraïsche vorm heeft opgesteld, dan kan men gegevens betreffende de opbrengst gebruiken om parameters der functies te schatten. Met aldus bepaalde functies kan men dan optimale combinaties van opbrengsten en grondstoffen, enz. bepalen, als de prijzen gegeven zijn. Deze methode wordt vaak toegepast. Indien het echter niet zeker is, dat een algebraïsche vorm voor een productie-functie bestaat, die de werkelijkheid voldoende dicht benadert, is het volgens de schrijver beter een discreet aantal beslissingen t.a.v. de productie te beschouwen. Deze methode wordt in dit artikel beschouwd. Er wordt hierbij gebruik gemaakt van het begrip "prijzen-ruimte" (zie ook: Hildreth en Reiter: "On the choice of a crop rotation plan", Ch.XI van

"Activity analysis of production and allocation", uitgegeven door T.C. Koopmans). Deze prijzen-ruimte wordt verdeeld in een aantal gebieden; in elk gebied geeft een bepaald productie-programma een maximale netto opbrengst.

De schrijver licht de methode op duidelijke wijze toe aan het geval van verschillende mogelijkheden betreffende het gebruik van kunstmest bij de katoenproductie.

44) A spatial equilibrium model of the livestock-feed economy in the United States,

Karl A. Fox, *Econometrica* 21 (1953), 547-566.

In dit artikel wordt een toepassing behandeld van een ruimtelijk in evenwicht zijnd model ("spatial equilibrium model"), hetwelk o.a. behandeld is door Paul A. Samuelson: "Spatial price equilibrium and linear programming", *American Economic Review*, Vol. 42, Juni 1952, p. 283-303. Samuelson geeft daarin tevens het verband aan met het transportmodel van Koopmans.

Het model van Samuelson wordt hier nu toegepast op het geval van de voorziening van de veestapel in de Verenigde Staten met veevoeder. Hiertoe werden de Verenigde Staten in tien gebieden verdeeld. Voor elk gebied werd een vraag-functie opgesteld: Er werd een regressie-vergelijking opgesteld voor de vraag naar veevoer, waardoor men vond:

$$P_c = 2,6873 - 3,50 \frac{Q_f}{N_1} + 0,0135 P_1,$$

waarbij P_c = prijs van het veevoeder;

Q_f = hoeveelheid veevoeder, die beschikbaar is;

N_1 = aantal dieren, waaruit de veestapel bestaat;

P_1 = prijs der dieren.

Verder werd in het model een tabel van transportkosten samengesteld tussen elk tweetal gebieden, en werd aangenomen, dat het prijsverschil tussen twee gebieden gelijk is aan de transportkosten (evenwichtsvoorwaarde).

Met behulp van deze onderstellingen werd langs intuïtieve weg een oplossing geconstrueerd; deze oplossing bevat dan de hoeveelheden, die tussen elk tweetal gebieden worden vervoerd, en de prijs in elk gebied.

De schrijver bespreekt tenslotte de invloed van veranderingen in de transportkosten, en in de beschikbare hoeveelheid veevoeder, en de mogelijkheid tot voorspelling der veevoeder-prijzen met behulp van dit model.

- 45) The Effect of promotional effort on sales,
John F. Magee, J.O.R.S.A. 1 (1953), 64-74.

Een maatschappij distribueert koffie over een groot aantal kleinhandelaars. Om de verkoop te stimuleren heeft men een aantal verkoopspromotors in dienst, die echter vanwege de hoge onkosten, hieraan verbonden, niet alle kleinhandelaars kunnen bezoeken. De vraag is nu wie men moet bezoeken, opdat de toename van de omzetten zo groot mogelijk zal zijn. De schrijver onderzoekt de resultaten van het werk van de verkoopspromotors en geeft een maat voor de doeltreffendheid van bepaalde keuzen voor de te bezoeken kleinhandelaars.

- 46) The Applications of Operations Research to Industry,
Lezing door Ellis A. Johnson, gehouden op de "Fifth Annual Industrial Engineering Institute, University of California",
31 Januari en 3 Februari 1953.

In deze lezing worden besproken de plaats van de Operations Research in de industrie en de wijze waarop een O.R. deskundige te werk moet gaan. Als middelen waarvan hij zich kan bedienen, worden genoemd waarschijnlijkheidsrekening en statistiek, symbolische logica, waarde -theorie, theorie van de wachttijden, Monte Carlo methoden en de speltheorie. Een vijftal voorbeelden vormen het besluit van de lezing. De uitvoerige bespreking vereist geen wiskundige kennis; er is een lijst van Operations Research instituten en een literatuurlijst aan de lezing toegevoegd.